# Opción A

## Ejercicio 1

Sea $f:\Re\to\Re$ la función definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Calcula los valores de ***a***, ***b***, ***c*** y ***d*** sabiendo que ***f*** verifica:

- El punto ***(0 , 1)*** es un punto de inflexión de la gráfica ***f***
- ***f*** tiene un mínimo local en el punto de abscisa ***x = 1***
- La recta tangente a la gráfica de ***f*** en el punto de abscisa ***x = 2*** tiene pendiente ***1***

### Solución

$$\begin{cases} f'(x)=3ax^2+2bx+c \\ f''(x)=6ax+2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0)=1\Rightarrow a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=1\Rightarrow d=1 \\ f'(1)=0\Rightarrow 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c=0\Rightarrow 3a+2b+c=0 \\ f'(2)=1\Rightarrow 3a\cdot 2^2+2b\cdot 2+c=1\Rightarrow 12a+4b+c=1 \\ f''(0)=0\Rightarrow 6a\cdot 0+2b=0\Rightarrow 2b=0\Rightarrow b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+c=0 \\ 12a+c=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$9a=1\Rightarrow a=\frac{1}{9}\Rightarrow 3\cdot\frac{1}{9}+c=0\Rightarrow \frac{1}{3}+c=0\Rightarrow c=-\frac{1}{3}$$

$$f(x)=\frac{1}{9}\cdot x^3-\frac{1}{3}\cdot x+1$$

## Ejercicio 2

Considerar las funciones $f,g:\Re\to\Re$ definidas por $f(x)=|x|$, $g(x)=6-x^2$. a) Esboza el recinto limitado por sus gráficas

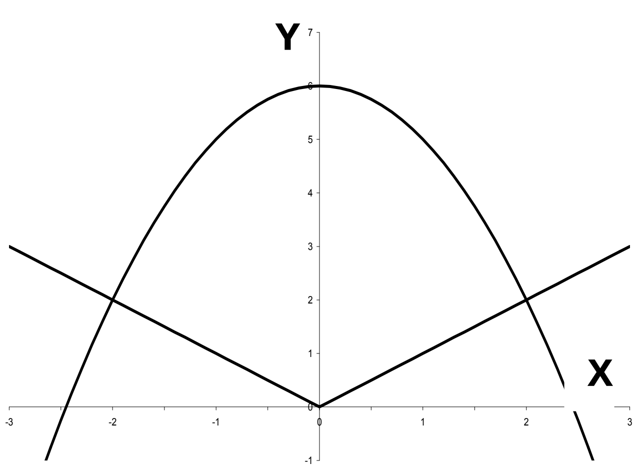
b) Calcula el área de dicho recinto

### Solución

*a)*

$$x>0\Rightarrow f(x)=\begin{cases} -x & si & x<0 \\ x & si & x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$g(x)=6-x^2\begin{cases} Puntos\ de\ corte\begin{cases} Con\ OY\Rightarrow g(0)=6-0^2=6\Rightarrow (0\ ,\ 6) \\ Con\ OX\Rightarrow 6-x^2=0\Rightarrow x^2=6\Rightarrow x=\pm\sqrt{6}\Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{6}\Rightarrow (\sqrt{6}\ ,\ 0) \\ x=-\sqrt{6}\Rightarrow (-\sqrt{6}\ ,\ 0) \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} g'(x)=-2x=0\Rightarrow -2x=0\Rightarrow x=0 \\ g''(x)=-2 \end{cases} \Rightarrow M\acute{a}ximo\ en\ x=0\Rightarrow g(0)=6-0^2=6\Rightarrow (0\ ,\ 6) \end{cases}$$




b)

$$Corte\ entre\ \ funciones\begin{cases} -x=6-x^2 \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{25}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+5}{2}=3 \Rightarrow No\ valido \\ x=\dfrac{1-5}{2}=-2 \end{cases} \\ x=6-x^2 \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{25}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1-5}{2}=-3 \Rightarrow No\ valido \\ x=\dfrac{-1+5}{2}=2 \end{cases} \end{cases}$$

$$A=2\int_0^2 \left(6-x^2\right)dx-2\int_0^2 x\,dx=12\cdot[x]_0^2-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^2=12\cdot(2-0)-\frac{2}{3}\cdot\left(2^3-0^3\right)-\left(2^2-0^2\right)$$

$$A=24-\frac{16}{3}-4=20-\frac{16}{3}=\frac{60-16}{3}=\frac{44}{3}$$

## Ejercicio 3

Tratamos de adivinar, mediante ciertas pistas, los precios de tres productos ***A*** , ***B*** y ***C***

- Pista 1: Si compramos una unidad de ***A***, dos de ***B*** y una de ***C*** gastamos ***118 euros***
- Pista 2: Si compramos ***n*** unidades de ***A***, ***n+3*** de ***B*** y tres de ***C*** gastamos ***390 euros***

a) ¿Hay algún valor de ***n*** para el que estas dos pistas sean incompatibles?
b) Sabiendo que ***n = 4*** y que el producto ***C*** cuesta el triple que el producto ***A***, calcula el precio de cada producto

## Solución

a)

$$\begin{cases} A+2B+C=118 \\ nA+(n+3)B+3C=390 \end{cases} \Rightarrow$$

$$|A|=0 \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ n & n+3 \end{vmatrix}=n+3-2n=0 \Rightarrow 3-n=0 \Rightarrow n=3 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ n & 3 \end{vmatrix}=3-n=0 \Rightarrow 3-n=0 \Rightarrow n=3 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ n+3 & 3 \end{vmatrix}=6-(n+3)=0 \Rightarrow 3-n=0 \Rightarrow n=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$Si\ n=3 \Rightarrow rang(A)=1 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$

$Es\ imposible, con\ otra\ ecuación\ más, que\ el\ rango\ de\ los\ coeficientes\ sea\ 3\ o\ 2$

b)

$$\begin{cases} A+2B+C=118 \\ 4A+7B+3C=390 \\ C=3A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+2B+C=118 \\ 4A+7B+3C=390 \\ 3A-C=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ 4 & 7 & 3 & 390 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ 0 & -1 & -1 & -82 \\ 0 & -6 & -4 & -354 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ 0 & 1 & 1 & 82 \\ 0 & 0 & 2 & 138 \end{array}\right) \Rightarrow 2C=138 \Rightarrow C=\frac{138}{2}=69 \Rightarrow$$

$B+69=82 \Rightarrow B=82-69=13 \Rightarrow A+2\cdot 13+69=118 \Rightarrow A=118-26-69=23$

$Solución\ (23\,,13\,,69)$

## Ejercicio 4

Considera el punto ***A(1 , -2 , 1)*** y la recta ***r*** definida por las ecuaciones $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y+z=7 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano perpendicular a ***r*** que pasa por ***A***
b) Calcula la distancia del punto ***A*** a la recta ***r***

**Solución**

a) El vector director del plano $\pi$ es el mismo de la recta al ser perpendicular a ella, el otro vector es el formado por el punto ***A*** y el punto genérico del plano, ambos vectores son perpendiculares y su producto escalar nulo, que es la ecuación del plano buscado

$$x = 2 - y \Rightarrow 2\cdot(2-y) + y + z = 7 \Rightarrow 4 - 2y + y + z = 7 \Rightarrow z = 3 + y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-1, 1, 1) \\ R(2, 0, 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} = (-1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AG} = (x, y, z) - (1, -2, 1) = (x-1, y+2, z-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Rightarrow$$

$$(-1, 1, 1)\cdot(x-1, y+2, z-1) = 0 \Rightarrow -(x-1) + y + 2 + z - 1 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - y - z - 2 = 0$$

b) Resuelto el plano perpendicular a ***r*** y que pase por ***A***, se hallará el punto ***P*** que es el de corte de la recta y el plano $\pi$ ,la distancia entre el punto ***A*** y el ***P*** es la distancia pedida.

Punto de corte $\Rightarrow 2-\lambda-\lambda-(3+\lambda)-2=0 \Rightarrow -3\lambda-3=0 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow$

$$P\begin{cases} x = 2-(-1) = 3 \\ y = (-1) \\ z = 3+(-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(3,-1,2);\ \ A(1,-2,1) \Rightarrow \overrightarrow{AP}=(2,1,1) \\ d_{Ar} = d_{AP} = \|\overrightarrow{AP}\| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6} \end{cases}$$

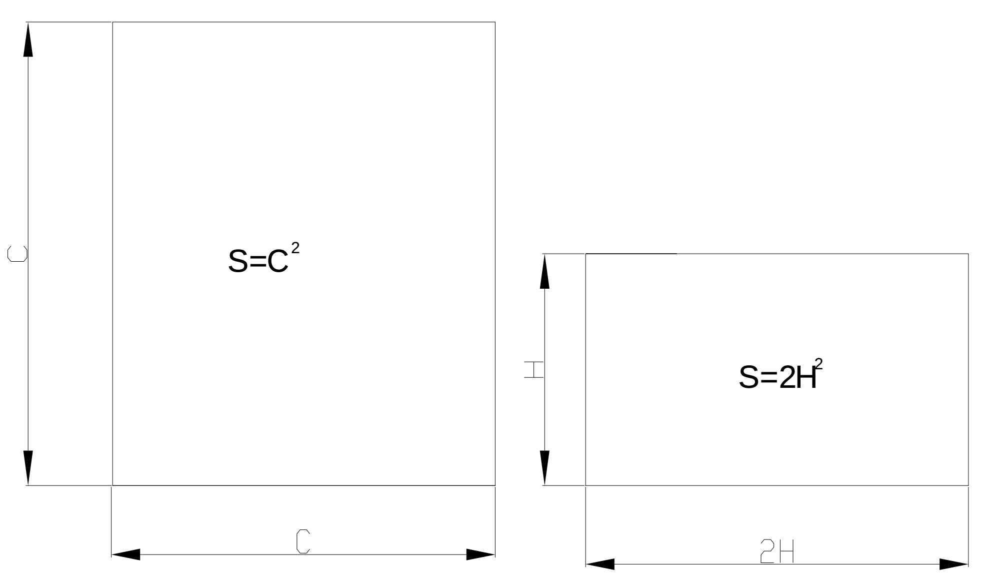
$d_{Ar} = \sqrt{6}$ u.a.

# Opción B

## Ejercicio 1

Se divide un segmento de longitud ***L = 20 cm.*** en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro un rectángulo en el que la base es el doble de la altura. Calcula la longitud de cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

**Solución**



$$\begin{cases} 20 = 4C + 2H + 2\cdot 2H \Rightarrow 20 = 4C + 6H \Rightarrow 10 = 2C + 3H \Rightarrow C = \dfrac{10-3H}{2} \Rightarrow \\ S = C^2 + 2H^2 \end{cases}$$

$$S = \left(\frac{10-3H}{2}\right)^2 + 2H^2 = \frac{100-60H+9H^2}{4} + 2H^2 = \frac{100-60H+9H^2+8H^2}{4} = \frac{100-60H+17H^2}{4} \Rightarrow$$

$$S' = \frac{dS}{dH} = \frac{1}{4}\cdot(-60+34H) \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow -60+34H = 0 \Rightarrow 34H = 60 \Rightarrow H = \frac{60}{34} = \frac{30}{17} \Rightarrow$$

$$S'' = \frac{d^2S}{dH^2} = \frac{1}{4}\cdot 34 > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \begin{cases} \text{Rectángulo} \Rightarrow \begin{cases} Altura = H = \dfrac{30}{17}\ cm \\ Base = 2H = \dfrac{60}{17}\ cm \end{cases} \\ Cuadrado \Rightarrow Lado \Rightarrow C = \dfrac{10-3\cdot\dfrac{30}{17}}{2} = \dfrac{\dfrac{170-90}{17}}{2} = \dfrac{80}{34} = \dfrac{40}{17}\ cm \end{cases}$$

## Ejercicio 2

La recta tangente a la gráfica de la función $f:\Re\rightarrow\Re$, definida por $f(x) = mx^2 + nx - 3$ en el punto ***(1 , -6)***, es paralela a la recta ***y = -x***

a) Determina las constantes ***m*** y ***n***. Halla la ecuación de dicha recta tangente

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función, la recta tangente anterior y el eje de ordenadas

## Solución

a)

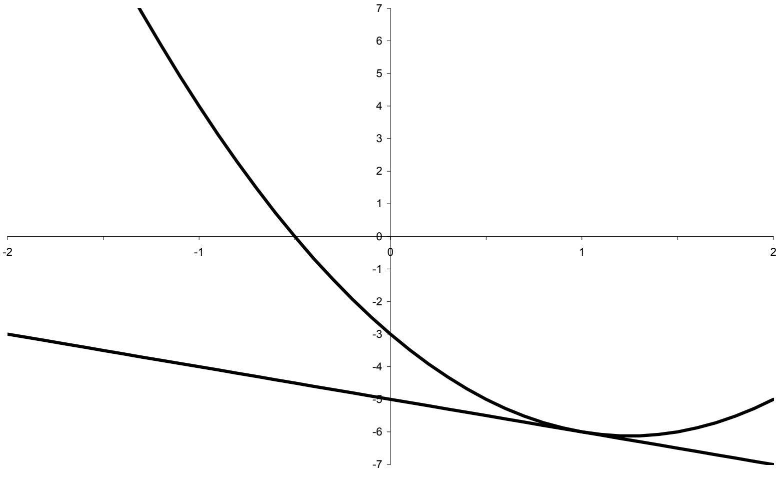
$$f'(x) = 2mx + n \Rightarrow \begin{cases} f(1) = -6 \Rightarrow m\cdot 1^2 + n\cdot 1 - 3 = -6 \Rightarrow m + n = -3 \\ f'(x) = -1 \Rightarrow 2m\cdot 1 + n = -1 \Rightarrow 2m + n = -1 \end{cases} \Rightarrow m = -1-(-3) \Rightarrow m = 2 \Rightarrow$$

$$2 + n = -3 \Rightarrow n = -5$$

$$f(x) = 2x^2 - 5x - 3$$

$$Ecuación\ de\ la\ tangente \Rightarrow y - (-6) = (-1)\cdot(x-1) \Rightarrow y + 6 = -x + 1 \Rightarrow x + y + 5 = 0$$

b)




$$A = \left|\int_0^1 (-x-5)\,dx\right| - \left|\int_0^1 (2x^2-5x-3)\,dx\right| = -\int_0^1 (-x-5)\,dx - (-1)\int_0^1 (2x^2-5x-3)\,dx$$

$$A = \int_0^1 (x+5)\,dx + \int_0^1 (2x^2-5x-3)\,dx = \int_0^1 (x+5+2x^2-5x-3)\,dx = \int_0^1 (2x^2-4x+2)\,dx$$

$$A = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^1 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^1 + 2\cdot[x]_0^1 = \frac{2}{3}\cdot(1^3-0^3) - 2\cdot(1^2-0^2) + 2\cdot(1-0) = \frac{2}{3} - 2 + 2 = \frac{2}{3}u$$

## Ejercicio 3

Sean ***A***, ***B***, ***C*** y ***X*** matrices que verifican ***AXB = C***

a) Si las matrices son cuadradas de orden 3, y se sabe que el determinante de ***A*** es ***3***, el de ***B*** es ***-1*** y el de ***C*** es ***6***, calcula el determinante de las matrices ***X*** y ***2X***

b) Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ calcula la matriz ***X***

## Solución

a)

Sabemos que el determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de dichas matrices, luego $|A|\cdot|X|\cdot|B| = |C| \Rightarrow |X| = \dfrac{|C|}{|A|\cdot|B|} = \dfrac{6}{3\cdot(-1)} = -2$

Como X es de orden 3, $|kX|=k^3.|X|$, luego

$|2X| = 2^3 \cdot |X| = 8\cdot(-2) = -16$

b)

Para que exista la inversa de una mariz su determinante tiene que ser distinto de 0.

Veamos si |A| y |B| son distintos de cero y podemos operar de la siguiente forma:

$A^{-1}AXB=A^{-1}C \Rightarrow IXB=A^{-1}C \Rightarrow XB=A^{-1}C \Rightarrow XBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1} \Rightarrow XI=A^{-1}CB^{-1} \Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$

$$\left\{\begin{array}{l} |A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{(-2)}.\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ |B|=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3+4=1 \neq 0 \Rightarrow B^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } B^t=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}=\dfrac{1}{1}.\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$X=A^{-1}CB^{-1}=\frac{1}{(-2)}.\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\frac{-1}{2}.\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir $X=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -14 & 8 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$

## Ejercicio 4

Considera la recta ***r*** definida por $\begin{cases} y=-1 \\ 2x-z=2 \end{cases}$ y la recta ***s*** definida por $\begin{cases} x=4+3\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=5+4\lambda \end{cases}$

Halla la ecuación del plano que contiene a ***r*** y es paralelo a ***s***

## Solución

Plano $\pi$ que es generado por los vectores directores de ***r*** y ***s*** y por el vector formado por un punto ***R*** de la recta ***r*** y el punto generador del plano.

$$z = 2x-2 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\alpha \\ y=-1 \\ z=-2+2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v_r}=(1,0,2) \\ R(0,-1,-2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{v_r} = (1,0,2) \\ \vec{v_s} = (3,-1,4) \\ \overrightarrow{RG}=(x,y,z)-(0,-1,-2)=(x,y+1,z+2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z+2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$6.(y+1)-(z+2)+2x-4.(y+1)=0 \Rightarrow 2x+2.(y+1)-z-2=0 \Rightarrow \pi \equiv 2x+2y-z=0$